

物理学 I (力学) 9 回目: 力積と運動量・物体の衝突

中野武雄
2011年6月5日

今日の内容

- 「仕事とエネルギー」の復習
- 力積と運動量
 - 運動方程式の時間積分→運動量の変化=力積
 - 作用反作用の法則と内力・外力
 - 質点系の重心と全運動量
- 2物体の衝突問題
 - 1次元の衝突と反発係数
 - 反発係数と運動エネルギーの保存
 - 重心を用いた衝突問題の解析

力積と運動量

運動量と運動方程式

定義: $\vec{p} \equiv m\vec{v}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

より、運動方程式は

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

この両辺を時間で積分すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

ベクトルの時間積分?

$\Delta t = \frac{t_2 - t_1}{n}$ と置くと:

$$\begin{aligned} & \vec{F}(t_1)\Delta t + \vec{F}(t_1 + \Delta t)\Delta t + \cdots + \vec{F}(t_1 + (n-1)\Delta t)\Delta t \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(t_1 + i\Delta t)\Delta t \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt \end{aligned}$$

デカルト座標系で

$$\begin{aligned} & \vec{F}(t) = F_x(t)\vec{e}_x + F_y(t)\vec{e}_y \text{ と成分表示できるなら} \\ & \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = \left\{ \int_{t_1}^{t_2} F_x(t) dt \right\} \vec{e}_x + \left\{ \int_{t_1}^{t_2} F_y(t) dt \right\} \vec{e}_y \end{aligned}$$

運動量の変化=力積

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt &= \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \frac{dp_x}{dt} dt \right\} \vec{e}_x + \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \frac{dp_y}{dt} dt \right\} \vec{e}_y \\ &= \{p_x(t_2) - p_x(t_1)\} \vec{e}_x + \{p_y(t_2) - p_y(t_1)\} \vec{e}_y \\ &= \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) \end{aligned}$$

$\vec{I} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$ と定義すれば、

$$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \vec{I}$$

- 運動量の変化は、与えられた力積に等しい

運動量保存則

- 力の働いていない物体

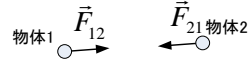
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \text{ より、} \vec{p} \text{ は時間によらず一定。}$$

- 力を及ぼしあう2物体

作用反作用の法則より、運動量の和は不変。



全運動量の保存



第三法則より $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ 、よって

$$\vec{p}_1(t_2) - \vec{p}_1(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{12} dt$$

$$\vec{p}_2(t_2) - \vec{p}_2(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{21} dt$$

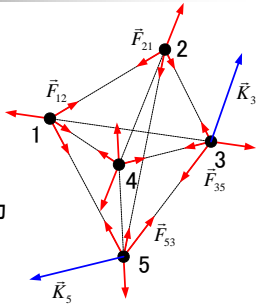
より、 $\vec{p}_1(t_2) - \vec{p}_1(t_1) = -\{\vec{p}_2(t_2) - \vec{p}_2(t_1)\}$

$$\Rightarrow \vec{p}_1(t_2) + \vec{p}_2(t_2) = \vec{p}_1(t_1) + \vec{p}_2(t_1)$$

質点系の全運動量保存

$$\text{全運動量 } \vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$$

- 内力: 質点間に働く力
→作用反作用の法則より
2質点で運動量変化は
キャンセル
- 外力: 外部から質点に働く力
→キャンセルできないので、
力積ぶん運動量に変化



重心と全運動量

$$m_1 + m_2 + \dots + m_5 = \sum_i m_i = M$$

$$\text{重心ベクトル } \vec{R}_G = \sum_i \frac{m_i}{M} \vec{r}_i$$

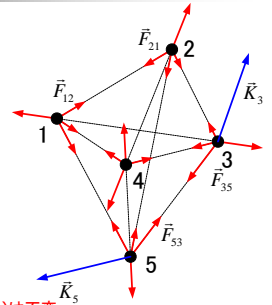
これを用いると全運動量は

$$\vec{P} = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = M \frac{d\vec{R}_G}{dt}$$

また

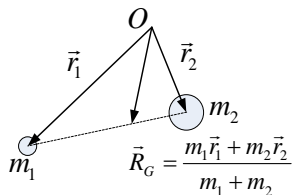
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_i \vec{K}_i$$

外力が0なら全運動量 (= 重心の運動量) は不変



2物体の場合の重心

- 重心は2物体を
結ぶ線上にあり、
それぞれの質
量に反比例して
内分した点とな
る。



2物体の衝突

衝突における運動量保存

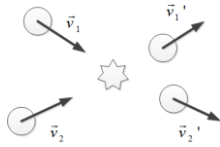
衝突の際の相互作用が、2物体の相互作用力のみであるとすれば、全運動量保存より

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

なので、

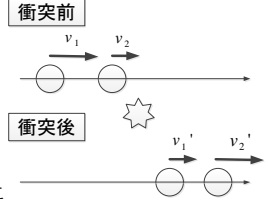
$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$

これが衝突現象の分析における基本の関係となる。



直線上の2物体の衝突 (1次元の衝突)

2物体が同じ直線上を進行して衝突、再び同じ直線上で運動する場合。



運動量保存の式は

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$$

となる (ただし v_1, v_2, v'_1, v'_2 は速度ベクトルの x 成分のように正負の値を取り得る)

はねかえり係数(反発係数)

衝突前の v_1, v_2 が既知でも、

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$$

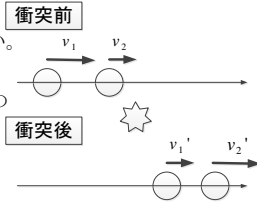
だけでは v'_1, v'_2 の値は決定しない。

はねかえり係数 e を、衝突前後の相対速度の比と定義する。

$$e = \frac{|v'_1 - v'_2|}{|v_1 - v_2|} \left(= -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} \right)$$

これを与えれば解ける。

(なお e は $0 \leq e \leq 1$ の範囲となる)



簡単な例 ($v_2=0, e=0$)

$v_2=0$ なので運動量保存の式は

$$m_1v_1 = m_1v'_1 + m_2v'_2$$

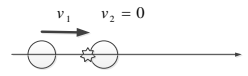
となる。また $e=0$ であるので衝突後の相対速度は0、すなわち

$$v'_1 = v'_2$$

このとき

$$v'_1 = v'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

となる。



簡単な例 ($v_2=0, e=1$)

運動量保存の式は同じく

$$m_1v_1 = m_1v'_1 + m_2v'_2$$

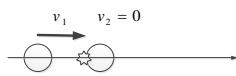
となる。また $e=1$ より

$$v_1 = v_2' - v_1'$$

これらを連立させて解けば、

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

となる。



非弾性衝突

衝突前後の運動エネルギーの和

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \quad K' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

を計算してみる。

$v_2=0, e=0$ の例では

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2,$$

$$K' = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \right)^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} K$$

よって $K' < K \rightarrow$ 非弾性衝突

弾性衝突

$v_2 = 0, e = 1$ の例では

$$K' = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{(m_1 + m_2)^2} (m_1(m_1 - m_2)^2 + 4m_2 m_1^2)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2} ((m_1 - m_2)^2 + 4m_1 m_2) = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

よって $K' = K \rightarrow$ 弾性衝突

重心の運動と衝突

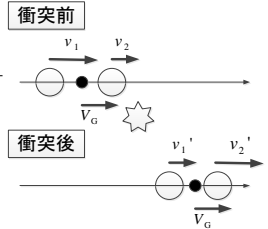
$$\text{重心 } X_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \text{重心の速度 } V_G = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

運動量保存

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

より $V_G = V_G'$, つまり重心の速度は衝突前後で不変。



相対速度と衝突

いま相対速度として

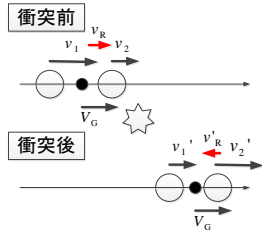
$$v_R \equiv v_1 - v_2$$

を定義すると、

$$v_1 = V_G + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_R$$

$$v_2 = V_G - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_R$$

となる。よって $e = -v_R' / v_R$ によって v_1', v_2' も決まる。



重心速度・相対速度による運動エネルギーの表記

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \left(V_G + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_R \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(V_G - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_R \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_G^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_R^2$$

よって $e = 1$ ならば $K = K'$ であることがわかる。

なお $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ は換算質量と呼ばれる。

おまけ: 相対座標による運動方程式

$\vec{r}_R = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ を定義すると、

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1}, \quad \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} \left(= -\frac{\vec{F}_{12}}{m_2} \right)$$

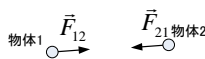
2式を辺々引いて

$$\frac{d^2 \vec{r}_R}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12} = \frac{1}{\mu} \vec{F}_{12}$$

よって相対速度の運動方程式

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}_R}{dt^2} = \vec{F}_{12}$$

を解けば2物体の運動が決まる。



参考: 2次元(3次元)の衝突問題

重心系で考えると考えやすい。要するに

$$\vec{v}_R \rightarrow \vec{v}_R'$$

衝突

の関係を与えれば衝突問題は解ける。

・剛体球の衝突なら、衝突角を与える

・2体間ポテンシャルによる衝突なら、

衝突パラメータ+角運動量保存の関係

などを使う (詳細知りたい人は、webに

ある江沢先生の参考書などを参照下さい)

