デジタル信号処理 第 02 回おまけ話

ポール・J・ナーイン著、松浦俊輔訳「0 と 1 の話〜ブール代数とシャノン理論」（青土社）という本（図書館に購入依頼中）に、ブール代数を用いたちょっと面白い問題の解法があったので紹介します。

問題

3 つの箱 A, B, C があり、赤、青、白のチップ各 1 枚が、ひと箱に 1 枚ずつ入っている。箱の外側には以下のように書いてあるが、このうち正しいのはひとつだけであることがわかっている。

箱 A の文言）この箱には赤いチップが入っている

箱 B の文言）この箱には赤いチップは入っていない

箱 C の文言）この箱には青いチップは入っていない

それぞれの箱に入っているチップはなにか。

解答

「箱 A に赤(red)のチップが入っている」という命題をブール変数 $\mathrm{A_r}$ で表わすことにする。真は 1、偽は 0 である。同様に他の箱についても $\mathrm{B_r}, \mathrm{C_r}$ を定義する。これらは排他、すなわち同時に 1 になることはない。またどこかの箱には赤いチップが入っているのだから、

$$\mathrm{A_r} + \mathrm{B_r} + \mathrm{C_r} = 1 \tag{1}$$

が成立する。

他の色（blue, white）のチップについても、$\mathrm{A_b}, \mathrm{B_b}, \mathrm{C_b}, \mathrm{A_w}, \mathrm{B_w}, \mathrm{C_w}$ のように命題を表すブール変数を定義する。$\mathrm{A_r}, \mathrm{A_b}, \mathrm{A_w}$ は排他で、B, C の各変数についても同様である。

箱 A, B, C の文言はそれぞれ $\mathrm{A_r} = 1, \overline{\mathrm{B_r}} = 1, \overline{\mathrm{C_b}} = 1$ という論理式に対応する。このうちひとつが真で、残りは偽なのであるから、$\mathrm{A_r B_r C_b}, \overline{\mathrm{A_r}}\,\overline{\mathrm{B_r}}\,\mathrm{C_b}, \overline{\mathrm{A_r}}\,\mathrm{B_r}\,\overline{\mathrm{C_b}}$ のいずれかが真である。つまり

$$\mathrm{A_r B_r C_b} + \overline{\mathrm{A_r}}\,\overline{\mathrm{B_r}}\,\mathrm{C_b} + \overline{\mathrm{A_r}}\,\mathrm{B_r}\,\overline{\mathrm{C_b}} = 1 \tag{2}$$

が言える。

$\mathrm{A_r}$ と $\mathrm{B_r}$ は排他だから、(2) の第 1 項は 0 で削除できる。その結果と(1)を用いれば、

$$(\mathrm{A_r} + \mathrm{B_r} + \mathrm{C_r})(\overline{\mathrm{A_r}}\,\overline{\mathrm{B_r}}\,\mathrm{C_b} + \overline{\mathrm{A_r}}\,\mathrm{B_r}\,\overline{\mathrm{C_b}}) = 1$$

が言える。左辺を展開すると、

$$\begin{gathered}
\mathrm{A_r}\overline{\mathrm{A_r}}\,\overline{\mathrm{B_r}}\,\mathrm{C_b} + \mathrm{A_r}\overline{\mathrm{A_r}}\,\mathrm{B_r}\,\overline{\mathrm{C_b}} \\
+\mathrm{B_r}\overline{\mathrm{A_r}}\,\overline{\mathrm{B_r}}\,\mathrm{C_b} + \mathrm{B_r}\overline{\mathrm{A_r}}\,\mathrm{B_r}\,\overline{\mathrm{C_b}} \\
+\mathrm{C_r}\overline{\mathrm{A_r}}\,\overline{\mathrm{B_r}}\,\mathrm{C_b} + \mathrm{C_r}\overline{\mathrm{A_r}}\,\mathrm{B_r}\,\overline{\mathrm{C_b}} = 1
\end{gathered}$$

となる。第 1 行の項はいずれも $\mathrm{A_r}\overline{\mathrm{A_r}}$ が含まれているので 0、第 3 行の項は $\mathrm{C_r C_b}$、$\mathrm{C_r B_r}$ が含まれているので 0、第 2 行の第 1 項は$\mathrm{B_r}\overline{\mathrm{B_r}}$ が含まれているので 0 である。

すなわち、真であるのは 2 行目の第 2 項である。これが真であるためには、

$$\mathrm{A_r} = 0, \mathrm{B_r} = 1, \mathrm{C_b} = 0$$

でなければならない。

つまり赤いチップは箱 B にある。青いチップは箱 C にはないのだから、箱 A にあるはず。このとき箱 C には白いチップがあるはずである。よって答は以下となる。

箱 A：青いチップ、箱 B：赤いチップ、箱 C：白いチップ