

## 18 希薄気体分子の流れと真空

今日の科学技術の発展に、真空関連の実験技術が寄与している部分は大きい。真空工学とは“全くなにもない状態”を扱う学問ではなく、希薄気体の分子運動を計測、制御する技術である。ここでは真空容器の排気作業とともに、気体分子の平均自由行程  $\lambda$  が気体を取り扱う装置の寸法  $D$  に比べて大きい場合の流れについて学ぶ。パイプを流れる気体のコンダクタンス  $C$  は、圧力の高い時 (粘性流) は分子同士の衝突に支配され圧力に比例するが、容器の壁との衝突頻度が高くなる (分子流) ような低い圧力領域では圧力に依らず一定になる。

### 1 理論

容器中での気体の振る舞いは、気体分子の衝突において、分子同士によるものが主か、あるいは分子と容器壁によるものが主かによって大きく異なる。衝突は方向の変換を伴うから、マクロに見た場合、気体の移動に対する抵抗となるのである。

ある気体分子が、他の分子と衝突することなく直進できる平均の距離は平均自由行程と呼ばれ、これが容器の寸法と比べて大きいか小さいかは、真空工学において非常に重要な意味を持つ。

#### 1.1 平均自由行程 (mean free path)

半径  $a$  の球状の気体分子が速度  $v$  で飛び回っているとす。この分子が他の分子に衝突せずに、どれだけの長さを飛行できるか (平均自由行程) を論じるには、次のように考える。まず、ある分子と他の分子との衝突は球の中心間の距離が  $2a$  に接近した時に起こるので、注目している分子だけを半径  $2a$  の球と考え、他の全ての分子は大きさのない点とみなす。次いで、分子間の相対速度  $v_R$  に着目して、この半径  $2a$  の分子だけが速度  $v_R$  で動くのに対し、他の分子はすべて静止しているものとする。

こうすると、半径  $2a$  の分子が  $\Delta t$  の時間に通過する空間の体積  $\Delta V$  は、

$$\Delta V = 4\pi a^2 v_R \Delta t \quad (18.1)$$

である。したがって、時間  $\Delta t$  の間にこの飛行している分子が静止した他の分子を跳ね飛ばす回数 (衝突周波数)  $\Delta f$  は、分子の数密度を  $n$  とし、 $\Delta f = n\Delta V$  で与えられる。

平均自由行程  $\lambda$  は、単位時間あたりの走行距離を衝突周波数で割ったものと考えてよく、

$$\lambda = \frac{v\Delta t}{\Delta f} = \frac{v}{4\pi a^2 v_R n} \quad (18.2)$$

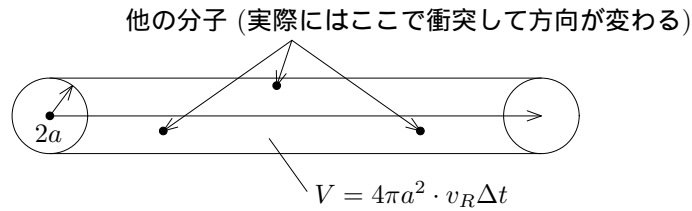


図 18.1: 平均自由行程の考え方

となる。ここでの  $v$  は静止座標系に対する分子の速度であり、分子間の相対速度  $v_R$  とは区別する必要がある。分子の速度分布が平均速度  $\langle v \rangle$  のマクスウェル (Maxwell) 分布に従っている場合は、分子間の相対速度は  $v_R = \sqrt{2}\langle v \rangle$  となることが知られている。上述式 18.2 中の  $v$  は  $\langle v \rangle$  のことであるから、結局

$$\lambda = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi a^2 n} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n} \quad (18.3)$$

となる。  $\sigma = \pi(2a)^2$  は衝突断面積と呼ばれる。

なお、気体分子の質量を  $M$ 、 Boltzmann 定数を  $k$  とすると、絶対温度  $T$  において、Maxwell 分布に従う気体の平均熱速度  $\langle v \rangle$  は

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi M}} \quad (18.4)$$

と表される。

圧力を表す単位としては、SI 単位である Pa (パスカル) を用いることが推奨されているが、真空工学の分野では、Torr (トール) も用いられることがある。その他慣用されている単位もいくつかあるが、それらの間の関係は大気圧 (1 気圧 (atm)) に対し以下ようになる。

$$1[\text{atm}] = 1013[\text{mb}] = 1.013 \times 10^5[\text{Pa}] = 760[\text{mmHg}] = 760[\text{Torr}] \quad (18.5)$$

平均自由行程に関して、室温の空気で圧力が  $p[\text{Torr}]$  の場合には次の概算式がある。

$$\lambda[\text{cm}] \cong \frac{5 \times 10^{-3}}{p[\text{Torr}]} \quad (18.6)$$

Q. Maxwell の速度分布について調べ、式 18.4 を導いてみよ。

## 1.2 コンダクタンス (conductance)

パイプなどを気体の流れる場合を考える。このとき、パイプのコンダクタンス ( $C$ ) とは、気体の流れ易さを意味し、単位時間当たりの気体の流量  $Q$  とパイプ両端の圧力差  $\Delta p$  との比によって与えられる。

$$C = \frac{Q}{\Delta p} \quad (18.7)$$

気体の量（分子の数）は、温度を一定とすれば、[(体積) × (圧力)] に比例する。したがって流量の次元は [(圧力) × (体積) / (時間)] であり、コンダクタンスの次元は [(体積) / (時間)] となる。コンダクタンスの単位は MKS 単位系で [m<sup>3</sup>/s] であるが、慣用的には [ℓ/s] も用いられる。一般にコンダクタンスは圧力に依存し、その依存性はそのときの平均自由行程 λ とパイプの直径 D との大小によって異なる。

$D \gg \lambda$  を満たす圧力領域は粘性流（またはポアズイユ流：Poiseuille's flow）領域と呼ばれ、分子は互いにぶつかりあいながら移動する。この領域でコンダクタンスを考えるには、流体力学的な取り扱いが必要となり、一般的にはコンダクタンスが圧力に比例する結果が得られる。

逆に  $D \ll \lambda$  のような圧力領域は分子流（またはクヌーセン流：Knudsen flow）領域と呼ばれる。この領域で気体の輸送を妨げる原因は、分子が管壁へ衝突して散乱される現象であり、コンダクタンスの大きさは圧力に依存しない。

直径  $D$ 、長さ  $L$  の円筒形パイプに関するコンダクタンスは、粘性流、分子流それぞれについて解析的な形で求めることができる。

粘性流領域においては、

$$C_P = \frac{\pi}{128\eta} \frac{D^4}{L} \bar{p} \quad (18.8)$$

と表される。ただしここで  $\eta$  は気体の粘性率、 $\bar{p}$  はパイプ両端の圧力の平均である。ちなみに 20 の空気に対しては、

$$C_P = 182 \frac{D^4}{L} \bar{p} \quad [\ell/s] \quad (\bar{p} \text{ は [Torr] 単位、L, D は [cm] 単位}) \quad (18.9)$$

となる。

一方分子流領域においては、

$$C_K = \frac{\pi}{12} \langle v \rangle \frac{D^3}{L} \quad (18.10)$$

である。 $\langle v \rangle$  は先に出てきた、分子の平均速度である。同様に 20 の空気においては、

$$C_K = 12.1 \frac{D^3}{L} [\ell/s] \quad (\text{L, D は [cm] 単位}) \quad (18.11)$$

となる。

この両者の境界 ( $D \simeq \lambda$ ) は中間流と呼ばれる。この領域のコンダクタンスの表式としては、クヌーセン (Knudsen [1909]) によって提案された次の実験式がよく用いられている。

$$C = C_P + C_K \times f(p) \quad (18.12)$$

$$f(p) = \frac{1 + \Gamma}{1 + 1.24\Gamma} \quad \text{ただし } \Gamma = \sqrt{\frac{M}{kT}} \frac{D\bar{p}}{\eta}$$

20 の空気の場合は、

$$\begin{aligned}
 C &= 182 \frac{D^3}{L} D\bar{p} + 12.1 \frac{D^3}{L} \frac{1 + 256D\bar{p}}{1 + 316D\bar{p}} \\
 &= 12.1 \frac{D^3}{L} J(D\bar{p})
 \end{aligned}
 \tag{18.13}$$

$$\text{ただし } J(D\bar{p}) = \frac{1 + 271(D\bar{p}) + 4790(D\bar{p})^2}{1 + 316(D\bar{p})}
 \tag{18.14}$$

となる。図 18.2 に  $J(D\bar{p})$  のグラフを示す。

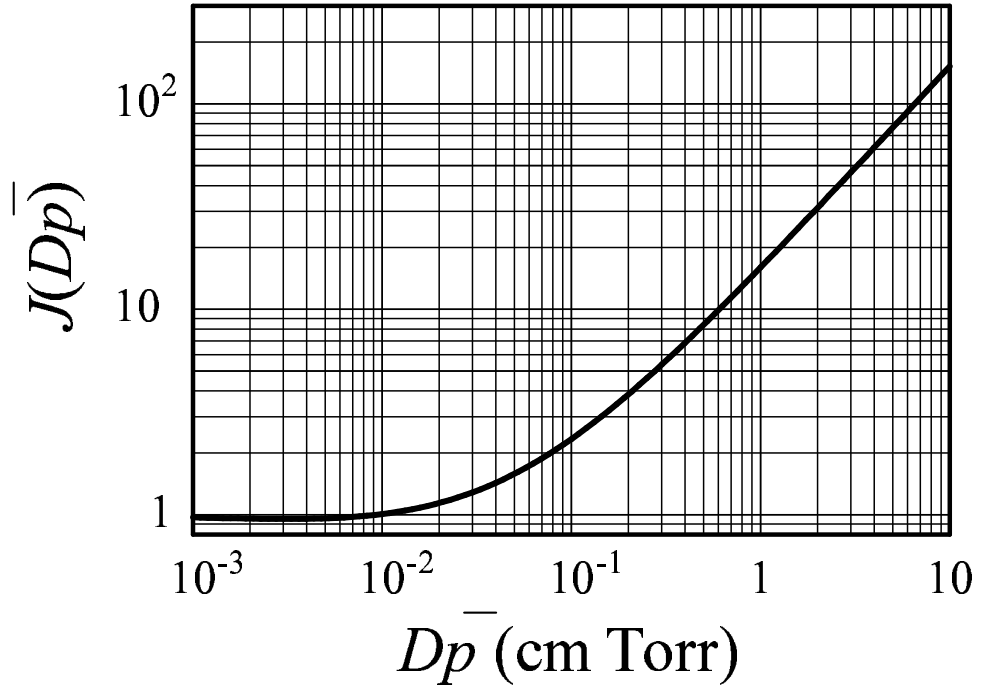


図 18.2:  $J(D\bar{p})$  のグラフ

パイプが直列あるいは並列につながっている場合の全体のコンダクタンスは、電気回路におけるコンダクタンスの合成と同様に計算される。すなわち、直列接続の場合 ( $C_s^{tot}$ ) と並列接続の場合 ( $C_p^{tot}$ ) について、合成コンダクタンスはそれぞれ、

$$\frac{1}{C_s^{tot}} = \sum_i \frac{1}{C_i}
 \tag{18.15}$$

$$C_p^{tot} = \sum_i C_i
 \tag{18.16}$$

となる。

Q. 20 の空気 ( $\eta = 1.35 \times 10^{-7}$  [Torr · s]) において、18.13 式から  $C$  vs  $P$  のグラフを書いてみよ。

## 2 実験

### 2.1 実験装置

実験装置の基本的な構成は図 18.3 のように、体積  $V(= 1[\ell])$  の 2 個の真空容器と、それを結ぶコンダクタンス測定用のパイプからなる。容器 1 はリーク弁につながれ、容器 2 は主バルブを通して真空ポンプ（排気速度  $S$ ）につながっている。

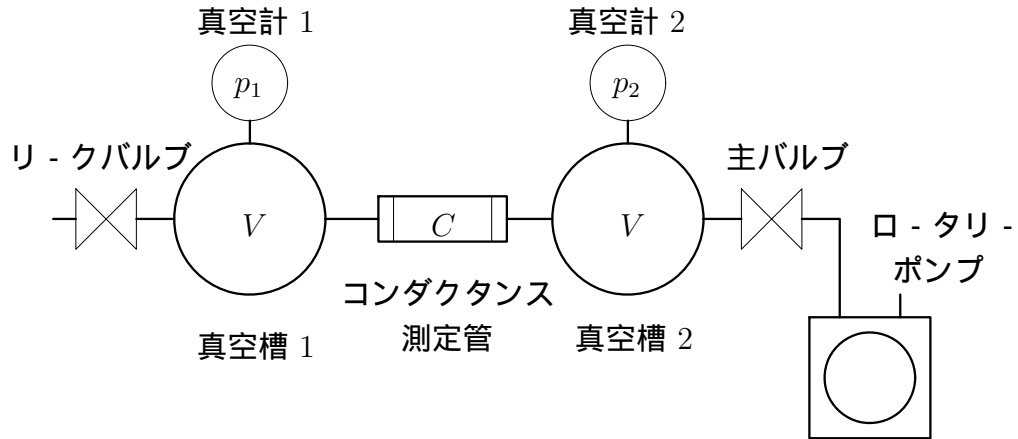


図 18.3: 実験装置

パイプは 3 本用意しており、それぞれ表 1 に示すような形状をしている。

	L(mm)	D(mm)	本数
No.0	100	25	1
No.1	10.0	0.51	16
No.2	2.0	0.13	200

表 1: コンダクタンス測定管

Q. 各々の管の分子流コンダクタンスを求めよ（当日実験開始時に解答を求めよ）。また、 $\lambda \approx D$  となる圧力  $p$  も、各管について求めてみよ。

図 18.3 のような装置において、容器 1、2 の圧力  $p_1$ 、 $p_2$  の変化は、連立微分方程式

$$V \frac{dp_1}{dt} = -C(p_1 - p_2) + Q' \quad (18.17)$$

$$V \frac{dp_2}{dt} = p_2 S + C(p_1 - p_2) \quad (18.18)$$

で表される。パイプのコンダクタンス  $C$  も、この式を基にして求める。式 18.18 中の  $S$  はポンプの排気速度と呼ばれるものである。これはポンプが単位時間あたりに排出する気体の体積を表し、コンダクタンスと同じ次元を持つ。

式 18.17 中の  $Q'$  は容器 1 への気体の流入を表している。これがなければ、定常状態 ( $t \rightarrow \infty$ ) において、 $p_1 = p_2$  となるはずであるが、実験を行なってみるとわかるように、実際には  $p_1$  は  $p_2$  より高い値におさまるのが普通である。すなわち有限の  $Q'$  が存在する。この  $Q'$  は、容器 1 における微小な空気もれ (リーク) や、大気開放の際に容器内壁についた水分などが再蒸発してくるものと考えられる。

実際に行うことは、 $p_1$ 、 $p_2$  の時間変化を測定することである。式 18.17 において  $dp_1/dt$ 、 $p_1$ 、 $p_2$  は測定可能な量であり、またリーク量  $Q'$  は、長時間経過して  $dp_1/dt$  が 0 になった時点での  $p_1$ 、 $p_2$  の  $p_{1u}$ 、 $p_{2u}$  を用いれば、

$$Q' = C(p_{1u} - p_{2u}) \quad (18.19)$$

と書けるから、式 18.17 は

$$V \frac{dp_1}{dt} = -C((p_1 - p_{1u}) - (p_2 - p_{2u})) \quad (18.20)$$

と書きなおすことができる。従って、 $p_1$ 、 $p_2$  の経時変化より、さまざまな平均圧力  $\bar{p} = (p_1 + p_2)/2$  におけるパイプのコンダクタンス  $C$  を求めることができる。

ただし No.0 の管においては、コンダクタンスが極めて大きいため、 $p_1$  と  $p_2$  の差は極めて小さく、この実験で用いる圧力計の精度に対して有意な値は得られない。従って以上の評価は、No.1、No.2 の管についてのみ行えば良い。

## 2.2 実験手順

1. リークバルブを開けて、装置内を大気圧に開放する。その後、真空計のコンセントを入れ、表示が実験室備え付けの気圧計とあっているかを確認する。大幅に異なっている場合には真空計前面の「ATM」ネジをまわして、正しい値を示すようにする。主バルブが閉まっていることを確認する。
2. No.0 のパイプをつなぎ、リークバルブを閉める。ロータリーポンプのスイッチを入れた後に主バルブを開く。同時に計時を開始し、 $p_1$ 、 $p_2$  の経時変化を記録する。

排気初期には急激に圧力が下がるため、できれば 5~10 秒おき程度で記録することが望ましい。圧力が 1 Torr 以下になると変化は比較的ゆるやかになるので、この場合は 15 秒~1 分おき程度に測定すれば充分である。

測定結果は、片対数グラフ用紙に記録する。このとき、圧力を対数軸にとる。(このようなグラフを、真空装置の排気特性と言う。) ここで No.0

による測定を行う理由は、装置および測定に慣れると行ったことのほかに、2つの圧力計の較正の意味がある。

3. 圧力が 10 mTorr 以下まで下がり、変化を示さなくなるのを待つ。5～6分待って変化がないようならそこで打ち切ってよい。このときに  $p_1$  と  $p_2$  の指度が大きく異なる場合には、担当教官に連絡する。問題がなければ主バルブを閉め、ロータリーポンプを停止して測定を終了する。
4. リークバルブを開けて真空容器内を大気リークし、パイプを No.1 に交換する。
5. No.0 の場合と同様の手順を踏まえて、 $p_1$ 、 $p_2$  の変化を記録する。この測定においては到達圧力が重要な意味を持つので、圧力が長時間 (~10分) 変動しなくなるまで充分待ち、その圧力を記録する。
6. 時間があれば No.2 に対しても No.1 と同様な測定を行なう。
7. すべての測定が終了したら、管を再び No.0 に交換し、容器全体を 10 mTorr 以下にまで排気する。その後主バルブを閉め、全ての装置の電源を切って実験を終了する。

### 3 解析

1. No.1 の排気特性グラフのある時間を選び、 $\log p_1 - t$  グラフに接線を引いて、その傾き  $d \log_{10} p_1 / dt$  を求める。片対数グラフでは、縦軸の1段の変化が1に対応していることに注意する。

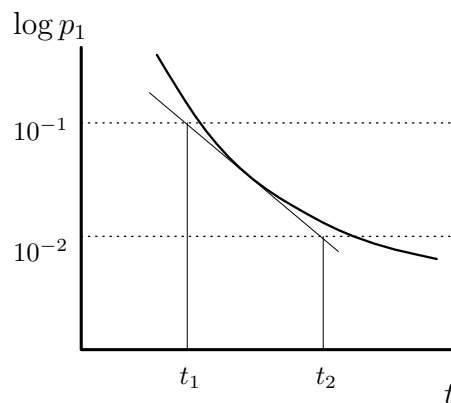


図 18.4: 片対数グラフにおける傾きの求め方

図 18.4 の場合には、

$$\frac{d}{dt} \log_{10} p_1 = \frac{\log_{10}(10^{-2}) - \log_{10}(10^{-1})}{t_2 - t_1} = \frac{-1}{t_2 - t_1}$$

となる。

2. 求めた傾き  $d \log_{10} p_1 / dt$  の底を  $e$  に変換し、接点における圧力  $p_1$  を乗じて  $dp_1/dt$  を求める。 $(\frac{d}{dt} \log_e p = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} p)$
3. 式 18.17 を用いてコンダクタンス  $C$  を計算する。以上の計算が実験グラフ上の任意の一点において正しくできていれば、当日の実験は終了となる。
4. 以上の解析を No.1、No.2 の管それぞれにおいて、 $\bar{p} = 10\text{mTorr} \sim 10\text{Torr}$  となる範囲の 10 個程度の点について行い、コンダクタンスの圧力依存性を両対数グラフに示す。
5. 同じグラフ上に、理論から得られる、粘性流と分子流それぞれの  $C - \bar{p}$  グラフを計算してプロットする。理論と実験結果を比較し、考察を行う。

## 参考文献

- [1] 堀越源一：「真空技術 [第 2 版]」 東京大学出版会. ... 2 章が特に本実験に関連が深い。
- [2] 熊谷寛夫、富永五郎：「真空の物理と応用」 裳華房.