

物理学Ⅰ 3回目 2012-04-24 担当：中野武雄 (nakano@st.seikei.ac.jp)

今日の内容：位置・速度・加速度（続き：2次元極座標）

2次元の運動における位置・速度・加速度の関係と取扱について復習し、発展させます。2次元以上では位置の表現を「ベクトル」で行うところがキモです。ベクトルには足し算・引き算とスカラー倍（スカラーでの割り算）が定義されているので、時間による微分演算が可能です。これを基準ベクトルと成分によって表現していきます：

1. 原点から物体の位置へ向かう「位置ベクトル」を定義する。
2. 位置ベクトルを基準ベクトルを用いて分解表示する。
3. 分解表示を、ルールに従って時間で微分する（基準ベクトルも微分の対象！）。
4. 微分した結果は、基準ベクトルのスカラー倍の和になっているはずなので、そこから速度ベクトルの成分を求める。速度→加速度も同様に行う。

2次元デカルト座標系

2次元デカルト座標系は基準ベクトルが位置・時間によらない「定数」なので、成分ごとの演算だけで位置→速度→加速度ベクトルを構成できます。

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y$ より成分表示は $(x(t), y(t))$

速度ベクトル： $\vec{v} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy(t)}{dt}\vec{e}_y$ より、成分表示は $(v_x, v_y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$

加速度ベクトル： $\vec{a} = \frac{dv_x(t)}{dt}\vec{e}_x + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec{e}_y$ より、 $(a_x, a_y) = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}\right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$

極座標系

極座標系の基準ベクトルは物体の位置（具体的には θ 座標）に依存して変化します。よって計算がややこしいのですが、結果のみ示しますと：

位置ベクトル： $\vec{r}(t) = r\vec{e}_r$ 。あえて成分表示すれば $(r(t), 0)$

速度ベクトル： $\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$ 、成分表示は $(v_r, v_\theta) = \left(\frac{dr}{dt}, r\frac{d\theta}{dt}\right)$

加速度ベクトル：同様に計算して、 $(a_r, a_\theta) = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \frac{2}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right)$

今回の課題

1. 1回目にやった月の公転運動 ($r=38$ 万 km、周期=27.3 日 (角速度 $2\pi/27.3$ [rad/day]) を等速円運動とみなし、加速度ベクトルの大きさを $[m/s^2]$ 単位で求めよ。
2. 地上から止まって見える人工衛星 (静止衛星) は、地球中心からの距離が 4 万 2 千 km である。運動を周期 1 日の等速円運動とみなし、加速度ベクトルの大きさを求めよ。
3. [発展] 地表は地球中心から 6.4×10^3 km の位置にあり、重力加速度は $9.8 [m/s^2]$ である。1,2 の場合とともに、加速度と地球中心からの距離の 2 乗との関係を考察せよ。
4. [発展・難] 円周上を動く物体において、角速度 $\omega = d\theta/dt$ が時間とともに一定の割合で増加する運動を考える (いうなれば「等加速度円運動」)。 $t=0$ で $\omega=0$ とし、その後の運動における a_r 、 a_θ の時間発展のグラフの概形を描け。