

物理学 I (力学) 5 回目: 簡単な運動方程式・代表的な運動

中野武雄
2012年5月08日

3回目課題の解答(1)

Q: 1回目にやった月の公転運動 ($r = 38$ 万 km, 周期 27.3 日 (角速度 $2\pi/27.3[\text{day}^{-1}]$)) を等速円運動とみなし、加速度ベクトルの大きさを $[\text{m/s}^2]$ 単位で求めよ

A: 等速円運動の加速度ベクトルの極座標系での成分表示は $(-r\omega^2, 0)$ だから、ベクトルの大きさは $|\vec{a}| = \sqrt{(-r\omega^2)^2 + 0^2} = r\omega^2$ 。

$$\begin{aligned} r\omega^2 &= 38 \times 10^4 [\text{km}] \times \left(\frac{2\pi}{27.3} [\text{day}^{-1}] \right)^2 = 2.01 \times 10^4 [\text{km/day}^2] \\ &= 2.01 \times 10^4 [\text{km/day}^2] \times \left(\frac{1[\text{day}]}{86400[\text{s}]} \right)^2 \times \left(\frac{1000[\text{m}]}{1[\text{km}]} \right) \\ &= 2.70 \times 10^{-3} [\text{m/s}^2] \end{aligned}$$

24x3600

3回目課題の解答(2)

Q: 地上から止まって見える人工衛星 (静止衛星) は、地球中心からの距離が 4 万 2 千 km である。運動を周期 1 日の等速円運動とみなし、加速度ベクトルの大きさを求めよ。

A: 1 と同様に計算して

$$\begin{aligned} r\omega^2 &= 4.2 \times 10^4 [\text{km}] \times \left(\frac{2\pi}{1} [\text{day}^{-1}] \right)^2 = 1.66 \times 10^6 [\text{km/day}^2] \\ &= 1.66 \times 10^6 [\text{km/day}^2] \times \left(\frac{1[\text{day}]}{86400[\text{s}]} \right)^2 \times \left(\frac{1000[\text{m}]}{1[\text{km}]} \right) \\ &= 2.22 \times 10^{-1} [\text{m/s}^2] \end{aligned}$$

3回目課題の解答(3)

Q: 地表は地球中心から 6.4×10^3 km の位置にあり、重力加速度は $9.8 [\text{m/s}^2]$ である。1, 2 の場合とともに、加速度と地球中心からの距離の 2 乗との関係を考察せよ。

A: 加速度と距離の 2 乗の積は

$$1: |\vec{a}|r^2 = 2.70 \times 10^{-3} [\text{m/s}^2] \times (38 \times 10^4 [\text{m}])^2 = 3.89 \times 10^4 [\text{m}^3/\text{s}^2]$$

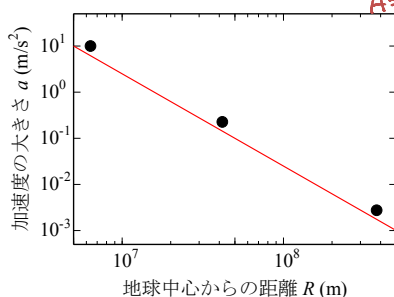
$$2: |\vec{a}|r^2 = 2.22 \times 10^{-1} [\text{m/s}^2] \times (4.2 \times 10^4 [\text{m}])^2 = 3.92 \times 10^4 [\text{m}^3/\text{s}^2]$$

$$\text{地表: } gR^2 = 9.8 [\text{m/s}^2] \times (6.4 \times 10^6 [\text{m}])^2 = 4.01 \times 10^4 [\text{m}^3/\text{s}^2]$$

誤差を考慮するとおおむね一致しているので、加速度は地球中心からの距離の 2 乗に反比例しているものと考えられる。

$a \cdot r^2 = \text{const.}$
 $a = \frac{\text{const.}}{r^2}$

参考: 両対数グラフ



3回目課題の解答(4)

Q: 円周上を動く物体において、速度 $\vec{v} = d\vec{\theta}/dt$ が時間とともに一定の割合で増加する運動を考える。 $t = 0$ で $\omega = 0$ とし、その後の運動における a_r , a_θ の時間発展のグラフの概形を描け。

A: ω は時間とともに一定の割合で増加し、 $t = 0$ で $\omega = 0$ なので $\omega = \alpha t$ と置ける。

$$\text{すなわち } \frac{d\theta}{dt} = \alpha t \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha$$

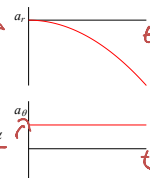
一方 $r = A$ は時間によらない定数なので、

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = 0$$

これらを極座標の加速度の成分表示に代入すれば、

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -A\alpha^2 t^2, \quad a_\theta = r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = A\alpha$$

□を得る。



今日の内容

- 前回のおさらい
- 一次元の運動
 - 等速度運動 $F = 0$
 - 等加速度運動 $F = F_0$ (定数)
 - 単振動 $F = -kx$ 
- 二次元の運動
 - 放物運動 
 - 坂を滑り降りる運動 
 - 円運動・振り子の運動 

前回のおさらい

- 運動の法則:
 - 第1法則: 慣性の法則
 - 第2法則: 運動の法則
 - 第3法則: 作用・反作用の法則
- 運動方程式
 - 力→加速度→速度→位置
 - 定積分: 区分求積法の極限
 - 不定積分: 微分の逆演算
 - 2階の微分方程式→2つの積分定数

運動の法則

- 第1法則: 慣性の法則
 - 「慣性系」の前提に注意
- 第2法則: 運動の法則
 - やはり慣性系に注意
 - 力の単位 [N] を定める法則とも言える
- 第3法則: 作用・反作用の法則
 - 「力の釣り合い」と混同しないよう注意
 - 2つの物体に働く力。一直線上、であるのも重要

運動方程式

- 第二法則を微分形式で書いたもの

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{f}$$

↓

$$\frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{1}{m} \vec{f}$$

「2階微分(2回微分)すると $\vec{f}$ になる関数を探せ」
 $\vec{f}$ は通常、時間・位置・速度などの関数

(不定)積分

- 微分の逆演算
 - 速度から位置を得る 
 - 加速度から速度を得る 
- 「積分定数」分の不定性→「初期値」が必要 

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t) \Leftrightarrow F(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + C$$

(なお不定積分 $\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$ は、単に $\int f(t) dt$ とも書く)

運動方程式を解くプロセス

- 2階微分方程式→積分定数が2つ入る
 1. 物体に作用する力を調べ、運動方程式を作る
 2. 運動方程式を解く
 3. 初期条件から、積分定数を決める 
 4. 時間の関数として位置を決める
- 力が位置や速度に依存する場合は?
 - 単純な積分では解けない。
 - 常に解けるとも限らない。
- 2次元以上の運動方程式は?
 - ベクトルの成分ごとの連立微分方程式となる

1次元の運動

F=0: 等速度運動

$$F=0 \Rightarrow a = \frac{F}{m} = 0$$

$a=0$

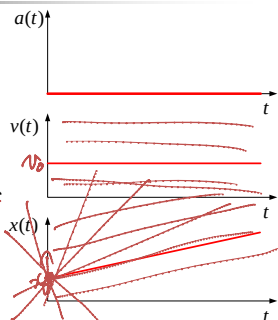
$$v = \int a \, dt + C_1 = C_1$$

$$x = \int C_1 \, dt + C_2 = C_1 t + C_2$$

時刻 $t=0$ における位置を x_0 、

速度を v_0 とすれば、

$$v(t) = v_0, \quad x(t) = v_0 t + x_0$$



F=一定: 等加速度運動

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{F_0}{m} = a_0$$

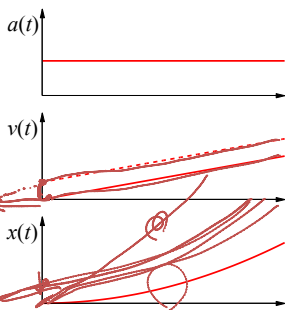
$$\frac{dx(t)}{dt} (= v(t)) = a_0 t + C_1$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + C_1 t + C_2$$

$t=0$ における位置 $x_0 = C_2$

$t=0$ における速度 $v_0 = C_1$

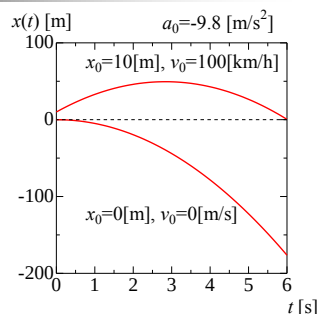
$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$



等加速度運動: 初期値依存性

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

v_0 、 x_0 を変えるとだいぶ
違ったグラフに見える。
ただし x 軸、 t 軸に沿って
適当な平行移動をすれば
重なるはず。



等加速度運動: ちょっとした性質

$$\left. \begin{aligned} v(t) &= a_0 t + v_0 \\ x(t) &= \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0 \end{aligned} \right\} \text{時刻 } t_1 \text{ での } \left\{ \begin{array}{l} \text{速度 } v_1 \\ \text{位置 } x_1 \end{array} \right. \text{ とする。}$$

$$v_1 = a_0 t_1 + v_0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_1 - v_0}{a_0}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} a_0 t_1^2 + v_0 t_1 + x_0 = \frac{1}{2} a_0 \left(\frac{v_1 - v_0}{a_0} \right)^2 + v_0 \frac{v_1 - v_0}{a_0} + x_0$$

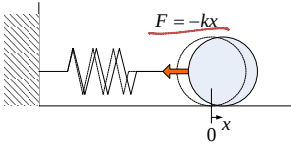
$$= \frac{1}{2} \frac{v_1^2 - 2v_1 v_0 + v_0^2}{a_0} + \frac{v_1 v_0 - v_0^2}{a_0} + x_0 = \frac{1}{2} \frac{v_1^2 - v_0^2}{a_0} + x_0$$

$$\Rightarrow a_0 (x_1 - x_0) = \frac{1}{2} (v_1^2 - v_0^2)$$

余談: 重力下での落体の運動

- 地表で質量 m の物体が受ける力は、鉛直下向きに mg 。つまり $F = mg$ 。
- 運動方程式より $F = ma$ 、よって $g = a$ 。
→ 質量によらず、すべての物体が同じ加速度を受ける。
- $F = ma$ の m (慣性質量) と、 $F = mg$ の m (重力質量) とが等しい理由は、ニュートン力学の範囲では特に無い。(→ 一般相対論では両者が等しいことを前提とする)

位置に比例する復元力



- 引っ張り・押し縮めともに、変位に比例して反発する力
- 多くの物質は、変化が微小な範囲ではこのように近似できる

位置に比例する復元力 → 単振動

$F = -kx$ より運動方程式は $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$

$$\frac{d}{dt} \cos \omega t = -\omega \sin \omega t, \quad \frac{d^2}{dt^2} \cos \omega t = -\omega^2 \cos \omega t$$

$$\frac{d}{dt} \sin \omega t = \omega \cos \omega t, \quad \frac{d^2}{dt^2} \sin \omega t = -\omega^2 \sin \omega t$$

だから $-\omega^2 = -\frac{k}{m}$ とすれば、 $x = \cos \omega t$, $x = \sin \omega t$

は運動方程式の解。それぞれの定数倍もまた解。

$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ とすれば、積分定数2つ(A, B)を含む一般解となる。

初期条件より積分定数を決定

$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$
 $v = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t$
 時刻0における位置を x_0 、速度を v_0 とすると、
 $A = x_0, \quad B = \frac{v_0}{\omega}$

と決まる。なお三角関数の和積公式から

$A \cos \omega t + B \sin \omega t = C \sin(\omega t + \phi_0)$
 となるようにC, ϕ_0 を選べる
 ⇒「位相」のずれた単振動

初期条件より積分定数を決定

$C \sin(\omega t + \phi_0) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$
 $C \sin(\omega t + \phi_0) = C \sin \phi_0 \cos \omega t + C \cos \phi_0 \sin \omega t$

$A = C \sin \phi_0$
 $B = C \cos \phi_0$
 $A^2 + B^2 = C^2 (\sin^2 \phi_0 + \cos^2 \phi_0) = C^2$
 $C = \sqrt{A^2 + B^2}$
 $\phi_0 = \tan^{-1} \frac{A}{B} \quad (B > 0)$
 $\phi_0 = \tan^{-1} \frac{A}{B} + \pi \quad (B < 0)$
 $x(t) = C \sin(\omega t + \phi_0)$

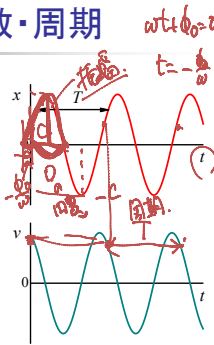
角周波数・周波数・周期

$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t = C \sin(\omega t + \phi_0)$
 $v = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t$

$\omega t = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ で元の状態に戻る。
 $\omega \leftarrow$ 角周波数

周期 $T \Leftrightarrow \omega T = 2\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

周波数 $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, or $\omega = 2\pi f$



2次元の運動

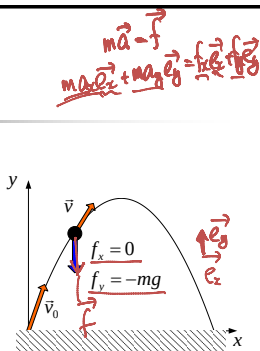
放物運動

- 下向きに一定の力
- デカルト座標系では

$$a_x = \frac{f_x}{m} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$a_y = \frac{f_y}{m} = \frac{-mg}{m} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = -g$$

で、成分ごとに別々に計算できる。



放物運動の解

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \Rightarrow v_x = v_{0x}, \quad x = v_{0x}t + x_0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g \Rightarrow v_y = -gt + v_{0y}, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0$$

積分定数に相当するのは v_{0x} 、 v_{0y} 、 x_0 、 y_0 の4つ。
2つの次元でそれぞれ2回積分するから。

速度一定下での 射出角度と距離

$v_{0x} = v_0 \cos \theta$ 、 $v_{0y} = v_0 \sin \theta$ 、 $x_0 = y_0 = 0$ のとき：

$x = v_0 \cos \theta t$ と $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t$ から t を消去

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta x = \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x + \tan \theta \right) x$$

再び $y=0$ となるのは $x = \frac{2v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$

よって $\theta = \frac{\pi}{4}$ (ラジアン) のとき、 x は最大値 $\frac{v_0^2}{g}$ となる。

$v_0 = 100$ [km/h] のとき

