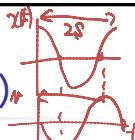


物理学 I (力学) 7回目: 仕事とエネルギー (1)

中野武雄
2011年5月22日

5回目課題の解答(1-B)



Q: 物体を釣り合いの位置から 10 [cm] 移動して手を離した場合、その後の振動における最大速度を求めよ。

A: 初期条件は $t=0$ において $x_0 = 0.10[m]$, $v_0 = 0[m/s]$

$$\text{一般解 } x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \text{ より } x_0 = A$$

$$\text{また } v = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t \text{ より } v_0 = \omega B$$

よってこの運動の解は $x = x_0 \cos \omega t$ で、このとき

$$\text{最大速度は } \omega x_0 = 3.16[\text{s}^{-1}] \times 0.10[\text{m}] = 0.32[\text{m/s}]$$

5回目課題の解答(1-D)



Q: Cの場合について、最初に釣り合いの位置に戻る時間を求めよ。

A:

$$\text{前問より } x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

これを $x(t) = C \sin(\omega t + \phi)$ 変換すると、振幅 $C = 0.32[\text{m}]$

$$\text{位相 } \phi = \tan^{-1} \left(\frac{x_0 \omega}{v_0} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{5.0 \times 10^{-2}[\text{m}] \times 3.16[\text{s}^{-1}]}{1.0[\text{m/s}]} \right) = 0.157[\text{rad}]$$

$t > 0$ で最初に $x = C \sin(\omega t + \phi) = 0$ となるのは $\omega t + \phi = \pi$

$$t = \frac{\pi - \phi}{\omega} = \frac{\pi - 0.157[\text{rad}]}{3.16[\text{rad/s}]} = 0.94[\text{s}]$$

5回目課題の解答(1-A)

$$\sqrt{10[\text{kg/s}^2]} = \boxed{3.16}$$

Q: ばね定数 $k = 10[\text{N/m}]$ のばねに質量 $1.0[\text{kg}]$ の物体をつなぎだ。発生する単振動の角周波数・周波数を求めよ。振動の周期も求めよ。

$$\text{A: 運動方程式 } m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \text{ の解 } x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$\text{において、角振動数 } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10[\text{kg/s}^2]}{1.0[\text{kg}]}} = \boxed{3.16[\text{s}^{-1}]}$$

$$\text{振動数 } f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.50[\text{s}^{-1}]$$

$$\text{周期 } T = \frac{1}{f} = 2.0[\text{s}]$$

5回目課題の解答(1-C)

Q: 物体を釣り合いの位置から $5.0[\text{cm}]$ 移動し、釣り合いから離れる方向に $1.0[\text{m/s}]$ で打ち出した。その後の振動における振幅を求めよ。

A:

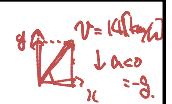
初期条件は $t=0$ において $x_0 = 5.0 \times 10^{-2}[\text{m}]$, $v_0 = 1.0[\text{m/s}]$

$$x_0 = A, v_0 = \omega B \text{ を使い、運動の解は}$$

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \text{ これを } x = C \sin(\omega t + \phi) \text{ と置くと}$$

$$\text{振幅 } C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2} = \sqrt{(5.0 \times 10^{-2}[\text{m}])^2 + \left(\frac{1.0[\text{m/s}]}{3.16[\text{s}^{-1}]} \right)^2} = 0.32[\text{m}]$$

5回目課題の解答(2)



Q: $10[\text{m}]$ の高さから、角度は上方45度($= \pi/4$ ラジアン)、速度は $141[\text{km/h}]$ で物体を打ち出した。重力加速度は $9.8[\text{m/s}^2]$ とする。物体が地面(高さ $0[\text{m}]$)に落ちるまでの時間、落ちた点と打ち出した点との水平方向の距離を求めよ。

$$\text{A: 放物運動の解 } x = v_{0x}t + x_0, y = \frac{1}{2}at^2 + v_{0y}t + y_0 \text{において、}$$

$$v_{0x} = v_{0y} = \frac{141[\text{km/h}]}{\sqrt{2}} = \frac{39.167[\text{m/s}]}{\sqrt{2}} = 27.70[\text{m/s}],$$

$$x_0 = 0[\text{m}], y_0 = 10[\text{m}], a = -9.8[\text{m/s}^2]$$

$$y = 0 \text{となる時間 } t = \frac{-v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 2ay_0}}{a} = -0.341[\text{s}], 5.99[\text{s}]$$

$$\text{これを代入して } x = 27.70[\text{m/s}] \times 5.99[\text{s}] = 166.0[\text{m}] \sim 1.6 \times 10^2[\text{m}]$$

今日の内容

- これまでの話のふりかえりと前回のおさらい
- 「保存量」のまえふり
 - 仕事とエネルギー
 - 力積と運動量
 - 角運動量と力のモーメント
- 仕事とエネルギー
 - 運動方程式の「積分」?
 - ベクトルの内積と経路積分
 - エネルギー方程式

これまでの話の流れ(0)

- 物理量=数値 & 単位
 - 同じ単位の数値は和が取れる
 - 「物理量」の計算をする場合は、途中の計算式でも単位を省略しない
- 単位の変換
 - 同じ物理量を示す等式(例: $1[m] = 100[cm]$)を作る
 - 「無次元の1」を表す表現をつくる
 - もとの式に「代入」すれば単位を整理できる

これまでの話の流れ(1)

- 運動の記述(1次元)
 - 位置の時間変化
 - 速度: 位置の時間微分
 - 加速度: 速度の時間微分
- 2次元での運動の記述
 - 位置ベクトルとベクトルの演算(和・差・スカラ倍)
 - ベクトルの微分→速度ベクトル、加速度ベクトル
 - 座標系とベクトルの成分表現: デカルト座標・極座標
 - 速度・加速度の成分表現

これまでの話の流れ(2)

- ニュートンの運動の法則
 - 第一法則: 惣性の法則
 - 第二法則: 運動の法則
 - 第三法則: 作用反作用の法則
 - 「力は加速度に比例する。速度そのものとは無関係」
- 運動方程式を解く
 - 積分: 微分の逆演算
 - 運動方程式は2階の微分方程式
→2つの積分定数: 初期条件などから決定

これまでの話の流れ(3)

- 基本的な運動
 - 1次元: 等速度運動、等加速度運動、単振動
 - 2次元: 放物運動、(円運動)
- 惣性系と慣性力
 - ガリレイ変換
 - 等速度運動する2座標系では運動方程式が等価
→慣性系
 - 加速度系と慣性力
 - 回転系における慣性力: 遠心力・コリオリの力

ガリレイ変換

互いに運動する座標系 O 、 O' において:

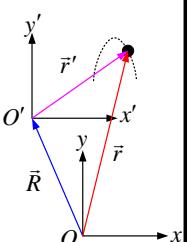
\vec{R} : O から見た O' の原点の位置ベクトル

\vec{r} : O から見た運動物体の位置ベクトル

\vec{r}' : O' から見た運動物体の位置ベクトル

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R} \quad (\Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}' + \vec{R})$$

$$\text{同様に } \vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \quad (\Leftrightarrow \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V})$$



相対運動と慣性系・慣性力

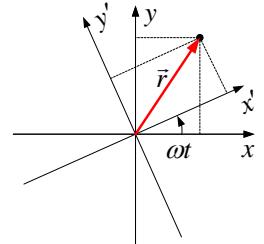
- 慣性系に対して等速運動している座標系は慣性系（ガリレイの相対性原理）

相対速度が時間によらない定数 \vec{V}_0 なら
 $\vec{a}'(t) = \vec{a}(t)$
 $\rightarrow m\vec{a} = \vec{F} \Leftrightarrow m\vec{a}' = \vec{F}'$
- 慣性系に対して加速度運動している座標系は非慣性系
 \rightarrow 運動方程式に「慣性力」の項が現れる

相対速度 $\vec{V}(t)$ が時間によって変化すると:
 $\vec{a}'(t) = \vec{a}(t) - \vec{A}(t)$
 $\rightarrow m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow m\vec{a}' = \vec{F}' - m\vec{A}(t)$

回転する座標系での慣性力

- 慣性系 O に対し、等角速度で回転する座標系 O' 。これも「加速度運動」しているので非慣性系
- デカルト座標系、極座標系による成分表現
 \rightarrow 運動方程式に現れる「慣性力」の導出

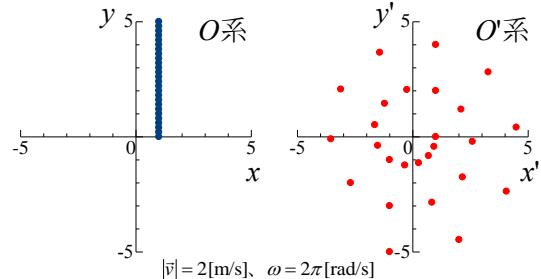


O' 系での運動方程式

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x'}{dt^2} &= F'_x + 2m\omega \frac{dy'}{dt} + m\omega^2 x' \\ m \frac{d^2y'}{dt^2} &= F'_y - 2m\omega \frac{dx'}{dt} + m\omega^2 y' \\ m \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} &= \vec{F} + \vec{F}_{Cor} + \vec{F}_{CF} \end{aligned}$$

ただし $\begin{cases} \vec{F}_{Cor} = 2m\omega(v'_y, -v'_x) & \text{コリオリの力} \\ \vec{F}_{CF} = m\omega^2(x', y') & \text{遠心力} \end{cases}$

O 系での等速直線運動が...



力学と保存量

保存量・保存則

- 微分方程式である運動方程式をいちいち解くのはたいへん
 - ある条件下においては、「時間によって変化しない物理量」が存在する
 - 時間とともに共通な物理量があれば、それをもとに代数的な計算が可能
- 保存量に対応して「保存則」
 - エネルギー保存則・運動量保存則・角運動量保存則

3つの保存量

- エネルギー
 - 質点系が受ける「仕事」が 0 なら変化しない
 - 保存力による仕事→全エネルギーの保存
 - ベクトルの「内積」と深く関わる
- 運動量
 - 質点系が受ける外力が 0 なら変化しない
 - 多体系で便利に使える
- 角運動量
 - 質点系が受ける「力のモーメント」が 0 なら変化しない
 - ベクトルの「外積」と深く関わる

余談: ネーターの定理

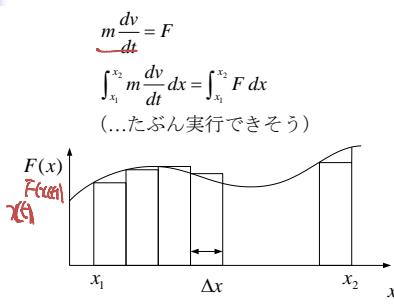
- 古典力学における座標と運動量の考え方を抽象化・高度化した「解析力学」の分野に進むと、保存量は時空間の対称性から導かれることが示される
 - エネルギー保存→時間の並進対称性
 - 運動量保存→空間の並進対称性
 - 角運動量保存→空間の回転対称性

仕事とエネルギー

話の流れ

- 運動方程式を位置(経路)で積分
→仕事と力学的エネルギー
(運動方程式を時間で積分→力積&運動量)
無駄
- 経路積分: 力(ベクトル)と経路の微小区間(ベクトル)の「内積」の積分
- 今日は「内積」の定義から経路積分を経て、エネルギー方程式(力学的エネルギー保存則)まで。

運動方程式の積分(1次元)



2次元以上の場合は...?

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$
$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} ... ?$$

ベクトルの内積と線積分

ベクトルの内積

自分との内積:

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2 (= A^2)$$

交換法則 :

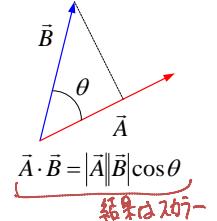
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

結合法則 (スカラ一倍) :

$$(k\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (k\vec{B}) = k(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

分配法則 :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$



参考: 内積の分配則

$$|\vec{B} + \vec{C}| \cos \theta_{B+C} = |\vec{B}| \cos \theta_B + |\vec{C}| \cos \theta_C$$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

ベクトルの内積の成分表現

基準ベクトル \vec{e}_1, \vec{e}_2 を用いると :

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$$

成分表現

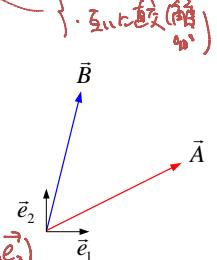
$$\vec{A} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$$

$$\vec{B} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2$$

に対して分配則を使えば、

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$(a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2)$$



参考: 余弦定理から成分表現

余弦定理から、

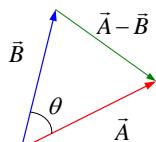
$$|\vec{A} - \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$|\vec{A}|^2 = a_1^2 + a_2^2$ などを用いると、

$$2\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - |\vec{A} - \vec{B}|^2$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2$$

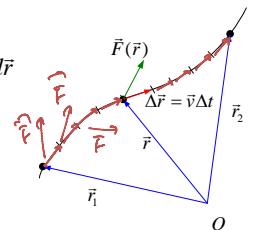
$$= 2a_1 b_1 + 2a_2 b_2$$



経路積分(線積分)

$$\sum \vec{F}(\vec{r}) \cdot \Delta \vec{r} \xrightarrow{\text{刻み目→極小}} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

(線積分の具体例は来週やります)



エネルギー方程式

運動方程式の積分

運動方程式

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

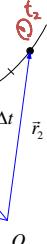
の両辺を線積分する

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

左辺は置換積分する

$$d\vec{r} = \vec{v} dt \quad \begin{array}{c|c} \vec{r} & \vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2 \\ t & t_1 \rightarrow t_2 \end{array}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



エネルギー方程式

「仕事」の定義・ 「運動エネルギー」の定義

右辺 $= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \equiv W(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ と定義。

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 : \text{運動エネルギー}$$

$W(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$: 経路 $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2$ における仕事

- 「運動エネルギーの増加は、その間に質点に働く力のなす仕事に等しい」

運動方程式の積分(1次元)

運動方程式の積分(1次元)

$$\int_{x_1}^{x_2} m \frac{dv}{dt} dx = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

左辺で $dx = v dt$ と置換する。 $\begin{array}{c|c} x & x_1 \rightarrow x_2 \\ t & t_1 \rightarrow t_2 \end{array}$

$v = \frac{dx}{dt}$

左辺 $= \int_{t_1}^{t_2} m \frac{dv}{dt} v dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}mv^2 dt = \frac{1}{2}mv(t_2)^2 - \frac{1}{2}mv(t_1)^2$

右辺 $= \int_{x_1}^{x_2} F dx$ は $W(x_1 \rightarrow x_2)$ と定義。
 $\Rightarrow \frac{1}{2}m(v(t_2)^2) - \frac{1}{2}m(v(t_1)^2) = W(x_1 \rightarrow x_2)$

$$\int_{x_1}^{x_2} m \frac{dv}{dt} dx = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

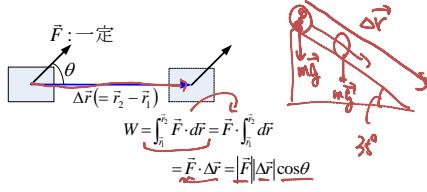
左辺で $dx = v dt$ と置換する。 $\begin{array}{c|c} x & x_1 \rightarrow x_2 \\ t & t_1 \rightarrow t_2 \end{array}$

$$\text{左辺} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{dv}{dt} v dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(v^2) dt = \frac{1}{2}m\{v(t_2)\}^2 - \frac{1}{2}m\{v(t_1)\}^2$$

右辺 $= \int_{x_1}^{x_2} F dx$ は $W(x_1 \rightarrow x_2)$ と定義。

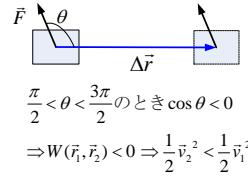
$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\{v(t_2)\}^2 - \frac{1}{2}m\{v(t_1)\}^2 = W(x_1 \rightarrow x_2)$$

参考:一定の力で
直線移動させるときの「仕事」



この値が \vec{r}_2 と \vec{r}_1 での運動エネルギーの差に等しい

余談:仕事が負の場合もある



- 加速度が速度と逆向き→減速過程に対応